

第5章

比率に関する推定と検定

5.1 母比率を推定する方法

今回は、名義尺度や順序尺度をもつカテゴリ変数を分析する方法に入る。まずは変数が1つの場合を考える。カテゴリ変数1つについての情報は、データ数と、個々のカテゴリが占める割合（標本比率）である。したがって、このデータから求める統計的な指標は、母比率、すなわち個々のカテゴリが母集団で占めるであろう割合である。通常、標本比率とほぼ一致する。

たとえば、手元の容器の中に、数百個の白い碁石があるとする。この概数を手っ取り早く当てるために、数十個の黒い碁石を混ぜる。よくかき混ぜてから20個程度の石を取り出してみて（標本），その中で黒い石が占めていた割合（標本比率）を求め、それが母比率と等しいと仮定して加えた黒い碁石の数を割って総数を求め、黒い碁石の数を引けば、元々の白い碁石の数が得られる。生態学で、野原のバッタの数を調べたいときに全数を調べるわけにはいかないので、捕まえてペンキでマークして放して暫く経ってからまた捕まえてマークされているバッタの割合を求めて、マークした数をそれで割って総数を推定する、というリンカーン法（Capture-Mark-Recapture, 略してCMRともいう）のやり方と同じである。

例題1.

最初に混入した黒い石の数が40個、かき混ぜてから20個の石を取り出してみたら黒石2個、白石18個だった場合、元の白石の数はいくつと推定されるか？

元の白石の数を x とすると、 $40/(40+x)=2/(2+18)$ となるので、これを x について解けば、 $x=360$ が得られる。したがって360個と推定される。

5.2 推定値の確からしさ

ここで、このようにして求めた推定値がどれほど確からしいか？を考えよう。たとえば、黒石の割合（母比率）が p である容器から 20 個の石を取り出したときに、黒石がちょうど 2 個である確率を考えると、これは二項分布に従う^{*1}。

つまり、確率 p の現象が 20 回中 2 回起こり、残りの 18 回は確率 $(1-p)$ の現象が

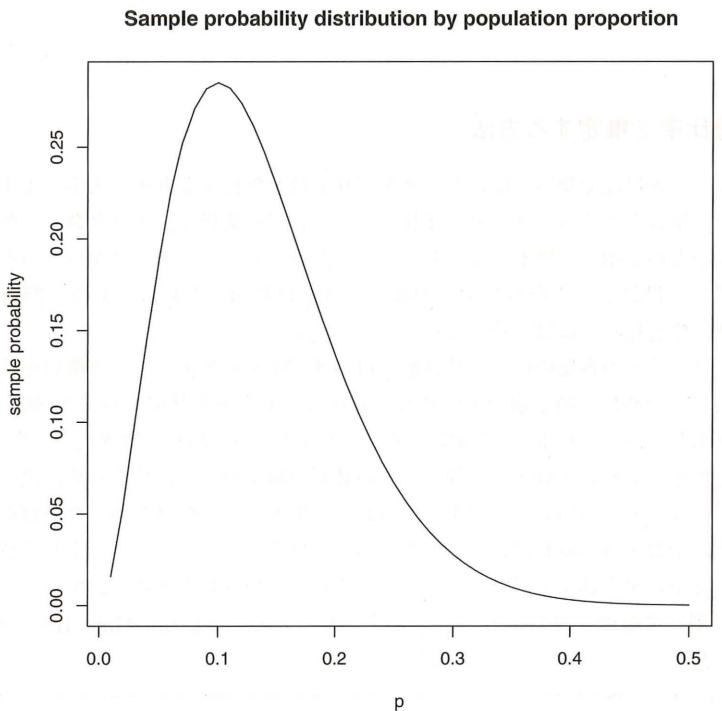


図 5.1 さまざまな p に対して、20 個取り出したときに黒石がちょうど 2 個である確率

^{*1} 謹密に考えると、この確率が二項分布に従うためには復元抽出でなければならないので、1 個取り出しては戻す必要がある。CMR ではそうしないが、それは標本に比べて母集団が十分に大きく、抽出操作が母比率に影響を与えるないと仮定できるからである。

起こったわけだから、その確率をすべて掛け合わせ、20回中どの2回で起るのかという組み合わせの数だけパターンがありうるので ${}_{20}C_2$ 回だけそれを足し合わせた確率になる^{*2}。この値が最大となるのは、図 5.1 のように $p = 0.1$ の時である。この図を描かせる R のプログラムは次の通り。

```
p <- c(1:50)/100
prob <- dbinom(2,20,p)
plot(p,prob,col="blue",type="l",
main="Sample probability distribution by population proportion",
ylab="sample probability")
```

40個入れて全体の0.1を占めるのだから、 $40/0.1=400$ が全体の数で、 $400-40=360$ が元の白石の数だと推定できる。ただし、図を見ればわかるように、 $p = 0.09$ だろうが $p = 0.11$ だろうが、黒石がちょうど2個である確率には大した差はない。だから、360個という点推定値は、404個とか324個に比べて、それほど信頼性は高くない。

5.3 信頼区間

では、ある程度の信頼性が見込める範囲を示すことは可能だろうか？ という考え方で示されるのが信頼区間である。例をあげよう。ビデオリサーチ (<http://www.videor.co.jp/index.html>)によれば、NHKの朝のテレビ小説「ほんまもん」の2001年10月8日の関東地区の視聴率は22.9%であった。関東地区的調査対象世帯は600だから、137世帯が見ていたことになる。このとき、関東地区全体の真的視聴率（母比率）は、どのくらいの範囲をとれば、95%の確率でその中に収まるのか？ というのが問題である。

「ほんまもん」を見る／見ないという事象が各世帯独立に起こるとすれば、二項分布で考えることができる。母比率が137/600の時にちょうど137世帯が見た（裏返して言えば463世帯が見なかった）確率は、 $\text{choose}(600, 137) * (137/600)^{137} * (463/600)^{463}$ で、たかだか3.9%に過ぎない。

しかし、たとえば、母比率が10%だったのに137世帯が見たという確率は、 $2.5 * 10^{-20}$ であり、まったくありそうにない。 $137/600$ の前後適当な幅をとれば、かなり高い確率で、ちょうど137世帯が見た、という事象が起こることになる。この幅を「信頼区間」という。95%の確率でちょうど137世帯が見たという事象が起こるための母比率の推定幅を、「95%信頼区間」という。

^{*2} R では $\text{choose}(20, 2) * p^2 * (1-p)^{18}$ あるいは $\text{dbinom}(2, 20, p)$ で得られる。

95% 信頼区間を求めるには、下側 2.5% の点と上側 2.5% の点を求めればよいので、R なら、

```
z<-0; k<-0; while (z<0.025) {
  k <- k+1; kk <- 600-k
  z <- z + choose(600,137) * (k/600)^137 * (kk/600)^463
  print((k-1)/600)
```

として下側 2.5% の点を求め、

```
z<-0; k<-600; while (z<0.025) {
  k <- k-1; kk<- 600-k
  z <- z + choose(600,137) * (k/600)^137 * (kk/600)^463
  print((k+1)/600)
```

として上側 2.5% の点を求めればよい。

結果として、600 世帯の調査で 22.9% の視聴率だったら、無限母集団の視聴率（眞の視聴率）の 95% 信頼区間は、19.5% から 26.5% の間といえる^{*3}。

5.4 正規近似による信頼区間の推定

2 項分布は、 n が大きいときは正規分布で近似できる。このことを利用すれば、母比率 p 、標本サイズ（調査世帯数） n で、その標本の中で注目している属性をもつ要素の数（「ほんまもん」を見た世帯数）を X 、観測比率を $p' = X/n$ とすれば、 X が近似的に正規分布 $N(np, np(1-p))$ に従うことになる。正規分布の 95% のサンプルは、平均 ± 標準偏差 $\times 1.96$ に含まれるので、

$$Pr[-1.96 \leq (X - np)/\sqrt{np(1-p)} \leq 1.96] = 0.95$$

これから式変形すると、 $Pr[p' - 1.96\sqrt{p'(1-p')/n} \leq p \leq p' + 1.96\sqrt{p'(1-p')/n}] = 0.95$ となるので、母比率 p は 95% の確率で $(p' - 1.96\sqrt{p'(1-p')/n}, p' + 1.96\sqrt{p'(1-p')/n})$ の範囲にあるといえる。すなわちこれが、母比率 p の 95% 信頼区間となる。

^{*3} この区間は 95% を含む最短であることは保証されないが、少なくとも 95% を含む。R に組み込まれている `binom.test()` 関数を使うと、`binom.test(137, 600, 0.229)` の結果、95% 信頼区間は下限が 19.5%、上限が 26.4% となる。

練習問題

ある大学の正門の前で、ある朝登校して来る学生の男女比を調べてみたところ、300人中、女子学生が75人であった。この大学の女子学生の割合の点推定値と95%信頼区間を求めよ。

点推定値は言うまでもなく $75/300=0.25$, つまり 25% である。95% 信頼区間の下限を求める R の式は、 $75/300 - 2 * \text{sqrt}(75/300 * 225/300 / 300)$, 上限は $75/300 + 2 * \text{sqrt}(75/300 * 225/300 / 300)$ であるから、95% 信頼区間は [20%, 30%] となる。なお、この推定には、朝登校して来る学生に男女の偏りがないという仮定があるので、実は真の値を過大評価することになっている。どうすれば正しい推定ができるような標本がとれるか、考えてみるのも一興であろう。

5.5 母比率の検定

予め母比率について何らかの期待があるとき（50% であるとか）、標本から推定された母比率が、それと違っていないかどうかを調べたい、ということが起こる。こういう場合の基本的な考え方としては、標本データの度数分布が、母集団について期待される分布と一致するという仮説（帰無仮説）が成り立っている確率を調べて、それが普通では考えられないほど小さい場合（通常は 5% 未満）に、滅多にないことだから偶然ではない（これを「有意である」という）、と考えて帰無仮説を棄却する。

カテゴリ数が全部で n 個あるとき、 i 番目のカテゴリの観測度数が O_i 、期待度数が E_i であるとき、 $\chi^2 = \sum (O_i - E_i)^2 / E_i$ が^{*4}、自由度 $n - 1$ のカイ二乗分布に従うことを利用して検定する（ただし、母数を標本から推定するときは、その数も自由度から引く。 E_i が 1 未満のときはカテゴリ分けをやり直す）。このような χ^2 が大きな値になることは、観測された度数分布が期待される分布と一致している可能性が極めて低いことを意味する。一般に、 χ^2 が自由度 $n - 1$ のカイ二乗分布の 95% 点よりも大きいときは、統計的に有意であるとみなして、帰無仮説を棄却する（適合しないと判断する）。

ちなみに、自由度 1 のカイ二乗分布は、図 5.2 のような形になる。 χ^2 値が 1 より大きくなる確率は、約 0.32 ということである。参考までに、自由度 n のカイ二乗分布の確率密度関数は、 $x > 0$ について、 $f_n(x) = 1/(2^{(n/2)}\Gamma(n/2))x^{(n/2)-1} \exp(-x/2)$ であり、平均 n 、分散 $2n$ である。なお、自由度 (degree of freedom; d.f.) とは、標

^{*4} χ は「カイ」と発音する。英語では chi-square と書かれるので、英文を読むときに間違って「チ」と読んでしまうと大変恥ずかしい。

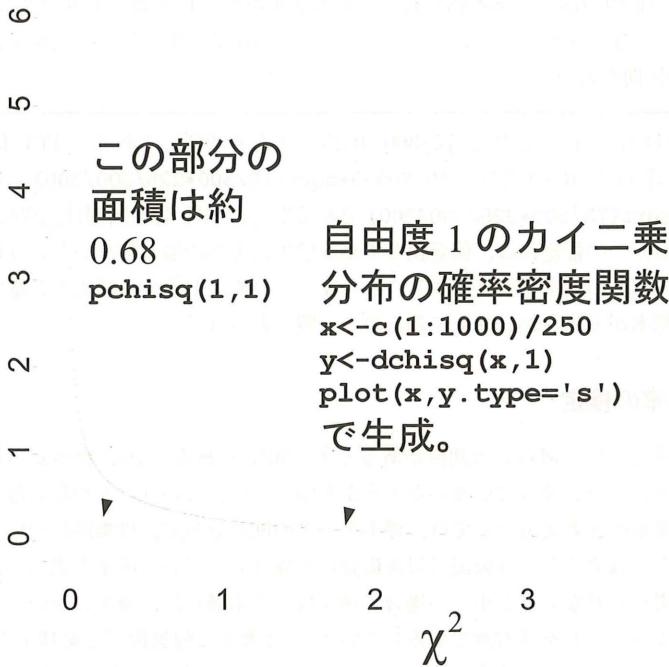


図 5.2 自由度 1 のカイ二乗分布

本の数から、前もって推定する母数の数を引いた値である^{*5}。この例なら $\sum E_i$ だけを $\sum O_i$ として推定すれば、 E_1 から E_{n-1} まで定めて E_n が決まる所以になるので、自由度は 1 を引く。

分布関数（確率母関数）は、確率密度関数を積分したものであり、図で見れば面積に当たる。その逆関数、つまり面積に対応する値を与える関数を分位点関数という。自由度 1 のカイ二乗分布の場合、R では、カイ二乗値 x について、確率密度関数が `dchisq(x,1)`、分布関数が `pchisq(x,1)` で与えられ、95% 点を与える分位点関数が `qchisq(0.95,1)` で与えられる。これは、 χ^2 値が `qchisq(0.95,1)` 以下である確

^{*5} 合計を母数と考えなければ、標本サイズから 1 を引いて母数の数を引く、と捉えてよい。前章で不偏分散を求めるときにも標本サイズから 1 を引いて自由度を求めた。

率が 95% であることを意味する。逆にいえば、 χ^2 値が $qchisq(0.95, 1)$ より大きくなることは、確率 5% もない、滅多にないことである。さらに言い換えると、「観測された分布が期待される分布と一致している可能性は 5% もない」ということである。このようなとき、「観測された分布が期待される分布と違いがない」という仮説は有意水準 5% で棄却されたといい、「観測された分布は期待される分布と一致するとはいえない」と解釈する。

例題 2.

ある病院で生まれた子ども 900 人中、男児は 480 人であった。このデータから、(1) 男女の生まれる比率は半々であるという仮説、(2) 男児 1.06 に対して女児 1 という割合で生まれるという仮説、は支持されるか？（出典：豊川・柳井、1982）

(1) の場合、 χ^2 は、 $X <- (480-450)^2/450 + (420-450)^2/450$ として計算される。この値が自由度 1 のカイ二乗分布に従うので、R で $1-pchisq(X, 1)$ とすれば、男女の生まれる比率が半々である場合に 900 人中男児 480 人という観察値が得られる確率が計算できる。その確率がきわめて小さければ（通常 5% 未満）、統計的に意味があるほど有り得なさそうな（「統計的に有意な」という）現象であると考えて、仮説を棄却する。

実は、この場合は母比率が 0.5 であるとして 2 項分布で計算してもよい。480 人以上になる確率と 420 人以下になる確率の合計がきわめて小さければ、「男女の生まれる比率は半々である」という仮説はありそうもないと考えてよいことになる。母比率 0.5 で起こる現象が、900 回中ちょうど 480 回起こる確率は、 $choose(900, 480) * 0.5^{480} * 0.5^{420}$ で与えられるが、R には 2 項分布についてもカイ二乗分布と同じように確率密度関数を与える関数があり、この確率は $dbinom(480, 900, 0.5)$ で与えられる。

480 人以上になる確率は、R では

```
dbinom(480, 900, 0.5) + dbinom(481, 900, 0.5) + ... + dbinom(900, 900, 0.5)
```

となるが、これは分布関数を使えば、 $1-pbinom(480, 900, 0.5)$ で計算できる。420 人以下になる確率は、

```
dbinom(0, 900, 0.5) + dbinom(1, 900, 0.5) + ... + dbinom(420, 900, 0.5)
```

であり、分布関数を使って書けば、 $pbinom(420, 900, 0.5)$ である。したがって、求める確率はこれらの和、すなわち、

```
1-pbinom(480,900,0.5)+pbinom(420,900,0.5)
```

である。計算してみると 0.045... となるので、有意水準 5% で仮説は棄却されることがわかる。

(2) の場合、 χ^2 は、

```
EM <- 900*1.06/2.06; EF <- 900*1/2.06
X <- (480-EM)^2/EM+(420-EF)^2/EF
1- pchisq(X,1)
```

を計算すると、約 0.26 となるので、仮説の下で偶然、男児が 900 人中 480 人以上になる確率は約 26% あると解釈され、この仮説は棄却されないことがわかる。

応用：

1日の交通事故件数を 155 日間について調べたところ、0 件の日が 79 日、1 件の日が 61 日、2 件の日が 13 日、3 件の日が 1 日、4 件以上の日が 1 日だったとする。このとき、1 日あたりの交通事故件数はポアソン分布に従うといえるか？
(出典：豊川・柳井、1982)^a

^a 一般に、稀な事象についてベルヌーイ試行を行うときの事象生起数がポアソン分布に従うことなどが知られている。交通事故は稀な事象であり、ある日に交通事故が起こる件数と翌日に交通事故が起こる件数は独立と考えられるので、交通事故件数はポアソン分布に従うための条件を満たしている。

R では、ポアソン分布の確率関数（離散分布の場合は、確率密度関数と言わずに確率関数というのが普通）は、`dpois(件数, 期待値)` で与えられる。

ポアソン分布の期待値（これは母数である）がわからないので、データから推定すれば、 $(0 \times 79 + 1 \times 61 + 2 \times 13 + 3 \times 1 + 4 \times 1)/155$ で得られる。R で書けば、この値を `Ehh` に保存するとして、

```
cc <- c(0:4); hh <- c(79,61,13,1,1); Ehh <- sum(cc*hh)/sum(hh)
```

となる。

したがって、1日の事故件数が期待値 `Ehh` のポアソン分布に従うとしたときの、事故件数 0~4 の期待日数 `epp` は、`epp <- dpois(cc,Ehh)*sum(hh)` で得られる。

こうなれば、`X <- sum((hh-epp)^2/epp)` としてカイ二乗値を求め、これが自由度 3（件数の種類が 5 種類あって、ポアソン分布の期待値が母数として推定されたので、 $5 - 1 - 1 = 3$ となる）のカイ二乗分布に従うとして `1-pchisq(X,3)` が 0.05 よ

り小さいかどうかで判定すれば良さそうなものだが、それはいかない。

epp の値を見ればわかるが、epp[cc==4] が 1 より小さいのである。期待度数が 1 より小さいときはカテゴリを併合しなくてはならないので、epp[cc==4] を epp[cc==3] と併合する。すなわち、

```
ep <- epp[cc<3]
ep[cc==3] <- epp[cc==3]+epp[cc==4]
ep <- ep[!is.na(ep)]
```

として期待度数の分布 ep を得、

```
h <- hh[cc<3]
h[cc==3] <- hh[cc==3]+hh[cc==4]
h<-h[!is.na(h)]
```

として観測度数の分布 h を得る。

後は、 $\chi^2 = \sum((h - ep)^2 / ep)$ としてカイ二乗値を求め、 $1 - pchisq(\chi^2, 2)$ を計算すると（カテゴリが 1 つ減ったので自由度も 1 減って 2 となる）、約 0.187 となることがわかる。すなわち、1 日の交通事故件数がポアソン分布に従っていると仮定したとき所与のデータよりも偏ったデータが得られる確率は約 19% あり、珍しいことはいえない。